ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1985

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Respecter strictement la numérotation des questions et les notations de l'énoncé.
Aucun résultat sans démonstration ne sera pris en considération.

———————— o O o ————————

$x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$; on considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -n \\ 0 & \text{si } x < -n \end{cases}$$

1 – Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1 , f_2 et f_3 .

Représenter dans un même repère orthonormé $0\,x\,y$ les variations de f_1 , f_2 et f_3 .

2 – Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}$. Jusqu'à quel ordre la fonction f_n est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Trouver $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

3 – Soit (a_n) une suite de réels tels que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$$

Trouver $\lim_{n \to +\infty} e^{-a_n} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$.

4 – $t \in R_+^*$; x est donné , $x \neq 0$; étudier les variations de la fonction :

$$\varphi : t \longmapsto \varphi(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$$

dans les deux cas : $x > 0$;

$x < 0$ avec $t > -x$.

On étudiera avec précision le signe de la dérivée et les limites.

En déduire la comparaison dans $\mathbb{R}$ de :

$f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$;

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et e^x, pour $x \geqslant -n$ et $x \neq 0$;

$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ et e^{-x} , pour $x \leqslant n$ et $x \neq 0$.

5 – On pose $I_n = \int_0^{n^2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n dx$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^{-n} dx$.

a – Pour quelles valeurs de n l'intégrale J_n est-elle convergente ?

b – Etudier la convergence de $K = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$

sans calculer de primitive.

c – Comparer , dans $\mathbb{R}$, les intégrales I_n , K et J_n .

d – Calculer I_n et J_n en fonction de n .

e – En déduire la valeur de K . Vérifier le résultat obtenu par un calcul de primitive.

f – Calculer l'intégrale $u_k = \int_0^{+\infty} \exp\left(-x^{\frac{1}{k}}\right) dx$, $k \in \mathbb{N}^*$

où exp désigne la fonction exponentielle.

6– $x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}^*$, x et y sont donnés ; $n \to +\infty$; $\frac{1}{n}$ est l'infiniment petit principal.

a - Trouver un infiniment petit équivalent à

$$f_n(x + y) - f_n(x) \cdot f_n(y)$$

b– Trouver un infiniment petit équivalent à

$$\left[f_n(x)\right]^y - f_n(xy) \quad .$$

c – Trouver le développement limité à l'ordre deux , en $\frac{1}{n}$, de $e^{-x} f_n(x)$.

7– Soit $F_n(x) = e^x - f_n(x)$; on a $F_n(0) = 0$.

a – Pour $x \neq 0$, étudier le signe de $F_n(x)$.

b – Trouver, quand $n \to +\infty$, un infiniment petit équivalent à $F_n(x)$; $\frac{1}{n}$ est l'infiniment petit principal ; $x \neq 0$.

c – Démontrer l'inégalité $F_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n} e^x$.

On distinguera les cas :

$$x \leqslant -n \quad ; \quad x \geqslant n \quad ; \quad -n < x < n \quad .$$

d – $x \leqslant 0$; soit $\varphi_n = \sup F_n(x)$ sur $]-\infty, 0]$.

En utilisant la majoration du 7 – c – étudier $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n$.

8 – a – Démontrer que , pour $n \geqslant 2$, l'équation $F_n'(x) = 0$, où F_n' désigne la dérivée de F_n , admet pour racines 0 et x_n , $-n < x_n < -1$, sur $]-\infty, 0]$, avec $\varphi_n = F_n(x_n)$.

b– On pose $x_n = -n\theta_n$, $0 < \theta_n < 1$.

Démontrer la relation :

$$-\frac{1}{\theta_n} \text{Log}\,(1-\theta_n) = 1 + \frac{1}{n-1} \quad ; \text{ Log désigne le logarithme népérien .}$$

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = -\frac{1}{x} \text{Log}\,(1-x) \quad \text{sur }]0,1]$$

$$h(0) = 0 \quad .$$

En utilisant h , trouver $\lim_{n \to +\infty} \theta_n$.

c – Trouver un infiniment petit équivalent à θ_n quand $n \to +\infty$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

Trouver un infiniment petit équivalent à φ_n quand $n \to +\infty$.

9 – a – On donne, pour $x > 0$, les deux fonctions numériques :

$$x \longmapsto F(x) = \text{Log}(1+x) - \text{Log}\, x - \frac{1}{1+x}$$

$$x \longmapsto G(x) = \text{Log}(1+x) - \text{Log}\, x - \frac{1}{x}$$

Montrer que : $G(x) < 0 < F(x)$.

b – Etudier, pour $x > 0$, les variations des deux fonctions numériques :

$$x \longmapsto f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad ; \quad x \longmapsto g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

On ne demande pas de courbe représentative.

c – Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \quad .$$